Φροντιστήριο Διακριτών Μαθηματικών

Χριστόδουλος Φραγκουδάκης

19 Ιουνίου 2008

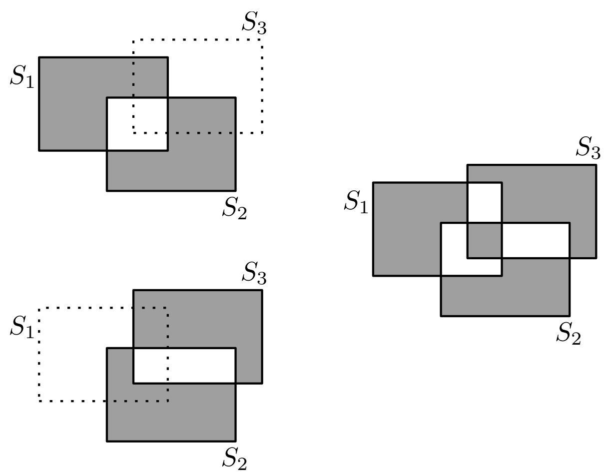
1 Σύνολα

1. Έστω A ένα μη κενό σύνολο. Να δείξετε ότι η αλγεβρική δομή $(\mathcal{P}(A), \oplus)$ είναι αβελιανή ομάδα.

   Πρέπει να δείξουμε ότι ικανοποιούνται οι ιδιότητες μιας αβελιανής ομάδας:

   Κλειστότητα: Αν $S_1, S_2 \in \mathcal{P}(A)$ τότε το σύνολο $S_1 \oplus S_2$ έχει στοιχεία που ανήκουν στο σύνολο A, άρα θα εμφανίζονται και σαν στοιχεία κάποιου υποσυνόλου του. Συνεπώς $S_1 \oplus S_2 \in \mathcal{P}(A)$.

   Προσεταιριστική ιδιότητα: Απο τα παρακάτω διαγράμματα Venn είναι φανερό ότι $S_1 \oplus (S_2 \oplus S_3) = (S_1 \oplus S_2) \oplus S_3$:



   Ουδέτερο στοιχείο: Αν $S \in \mathcal{P}(A)$ έχουμε ότι $S \oplus \emptyset = \emptyset \oplus S = S$, άρα ουδέτερο στοιχείο είναι το $\emptyset$.

   Συμμετρικό στοιχείο: Αν $S \in \mathcal{P}(A)$ έχουμε ότι $S \oplus S = \emptyset$, άρα το συμμετρικό κάθε στοιχείου είναι ο εαυτός του.

   Αντιμεταθετική ιδιότητα: Αν $S_1, S_2 \in \mathcal{P}(A)$ τότε $S_1 \oplus S_2 = (S_1 \cup S2) \setminus (S_1 \cap S_2) = (S_2 \cup S_1) \setminus (S_2 \cap S_1) = S_2 \oplus S_1$.

2. Στην ταινία μικρού μήκους «Hotel Infinity» της Amanda Boyle (δείτε στο `http://www.imdb.com/title/tt0418737/`) υπάρχει ένα ξενοδοχείο με άπειρα δωμάτια και το σλόγκαν «Είμαστε πάντα πλήρεις και πάντα έχουμε δωμάτια για να σας εξυπηρετήσουμε!». Ο ξενοδόχος έχει την ευχέρεια να μετακινεί τους πελάτες. Πως μπορεί να εξυπηρετηθούν: (α) ένας νέος πελάτης, (β) απείρως αριθμήσιμοι νέοι πελάτες, (γ) απείρως αριθμήσιμα γκρούπ από απείρως αριθμήσιμους νέους πελάτες;

(α) Κάθε πελάτης που μένει στο δωμάτιο με αριθμό i, μετακινείται στο δωμάτιο με αριθμό $i+1$, συνεπώς ελευθερώνεται το δωμάτιο με αριθμό 1. (β) Κάθε πελάτης που μένει στο δωμάτιο με αριθμό i, μετακινείται στο δωμάτιο με αριθμό $2i$, έτσι ελευθερώνονται τα δωμάτια με περιττό αριθμό $(2i+1)$ στα οποία χωρούν απείρως αριθμίσιμοι νέοι πελάτες. (γ) Ο ξενοδόχος ελευθερώνει τα δωμάτια με περιττό αριθμό όπως στην περίπτωση (β). Στη συνέχεια επιλέγει για το j-οστό γκρούπ πελατών τον j-οστό πρώτο αριθμό (π.χ. για το 6ο γκρούπ επιλέγει τον αριθμό 17) και τοποθετεί τον k-οστό πελάτη του γκρούπ στην k-οστή δύναμη του αριθμού (το πρώτο γκρούπ πελατών θα τοποθετηθεί στα δωμάτια με αριθμούς $3 = 3^1, 9 = 3^2, 27 = 3^3, \ldots$, το δεύτερο γκρούπ πελατών θα τοποθετηθεί στα δωμάτια με αριθμούς $5 = 5^1, 25 = 5^2, 125 = 5^3, \ldots$, κοκ).

3. Δώστε παραδείγματα για να υποστηρίξετε ότι η τομή δύο άπειρα αριθμήσιμων συνόλων μπορεί να είναι είτε πεπερασμένη είτε άπειρα αριθμήσιμη, και ότι η τομή δύο μη αριθμήσιμα απείρων συνόλων μπορεί να είναι πεπερασμένη ή άπειρα αριθμήσιμη ή μη αριθμήσιμα άπειρη.

   - Τα σύνολα των άρτιων φυσικών και των περιττών φυσικών αριθμών είναι απείρως αριθμήσιμα. Η τομή τους είναι το κενό σύνολο που είναι πεπερασμένο.
   - Τα απείρως αριθμήσιμα σύνολα $A = \{n : n = 2k \text{ για } k \in \mathbb{N}\}$ των πολλαπλασίων του 2, και $B = \{n : n = 3k \text{ για } k \in \mathbb{N}\}$ των πολλαπλασίων του 3, έχουν σαν τομή τους το σύνολο $A \cap B = \{n : n = 6k \text{ για } k \in \mathbb{N}\}$, το σύνολο των πολλαπλασίων του 6, ένα απείρως αριμθήσιμο σύνολο.
   - Τα σύνολα $\mathbb{R}^+$ των θετικών πραγματικών αριθμών και $\mathbb{R}^-$ των αρνητικών πραγματικών αριθμών είναι μη αριθμήσιμα άπειρα σύνολα. Η τομή τους, $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^- = \{0\}$ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο.
   - Τα σύνολα $[0,1] \cup \{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\}$ και $[-1,0] \cup \{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\}$, όπου $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ είναι μη αριθμήσιμα άπειρα σύνολα διότι έχουν σαν υποσύνολα μή αριθμήσιμα άπειρα σύνολα. Η τομή τους, το σύνολο $\{0\} \cup \{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\}$ είναι απείρως αριθμήσιμο σύνολο διότι υπάρχει 1-1 και επί συνάρτηση που στο 0 αντιστοιχίζει το 0 και σε κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ αντιστοιχίζει το $\frac{1}{n}$.
   - Όλα τα διαστήματα των πραγματικών αριθμών είναι μη αριθμήσιμα άπειρα σύνολα. Επομένως η τομή $[4,5]$ των διαστημάτων $[2,5]$ και $[4,6]$ είναι μη αριθμήσιμα άπειρο σύνολο.

4. (α) Υποθέστε ότι στην πόλη της Αθήνας υπάρχουν περισσότεροι κάτοικοι από τον αριθμό των τριχών στο κεφάλι οποιουδήποτε κατοίκου και ότι δεν υπάρχει τελείως φαλακρός κάτοικος. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι τουλάχιστο δύο κάτοικοι έχουν τον ίδιο αριθμό από τρίχες στο κεφάλι τους; (β) Υποθέστε ότι για κάποιο χωριό της Ελλάδας αληθεύουν οι παρακάτω προτάσεις: (i) Δεν υπάρχουν δύο κάτοικοι με ίδιο αριθμό από τρίχες στο κεφάλι τους, (ii) Δεν υπάρχει κάτοικος με 718 ή περισσότερες τρίχες και (iii) υπάρχουν περισσότεροι κάτοικοι απο τις τρίχες στο κεφάλι οποιουδήποτε κατοίκου. Ποιός είναι ο μέγιστος δυνατός αριθμός κατοίκων του χωριού;

   Για να απαντήσουμε στα ερωτήματα θα χρησιμοποιήσουμε ένα απλό γεγονός που χρησιμοποιείται σε μια εντυπωσιακά μεγάλη ομάδα αποδείξεων: Αν A και B είναι πεπερασμένα σύνολα και $|A| > |B|$, τότε δεν υπάρχει 1-1 συνάρτηση από το A στο B (**αρχή του περιστερεώνα**: αν πρέπει να τοποθετήσουμε περισσότερα περιστέρια από τις διαθέσιμες φωλιές σε ένα περιστερεώνα, τότε, αναγκαστικά, τουλάχιστο δύο περιστέρια θα συγκατοικούν).

   (α) Το σύνολο των κατοίκων της Αθήνας (περιστέρια) έχει μεγαλύτερο πληθάριθμο από το σύνολο που περιέχει τους διαφορετικούς πιθανούς αριθμούς από τρίχες (φωλιές) στο κεφάλι οποιουδήποτε κατοίκου (100.000 είναι ο μέσος όρος του αριθμού των τριχών στο κεφάλι του ανθρώπου). Άρα δεν υπάρχει 1-1 συνάρτηση από το σύνολο των κατοίκων πρός το σύνολο των πιθανών διαφορετικών αριθμών από τρίχες στο κεφάλι οποιουδήποτε κατοίκου. Άρα τουλάχιστο δύο κάτοικοι έχουν τον ίδιο αριθμό από τρίχες στο κεφάλι τους. (β) Αν υπήρχαν περισσότεροι από 718 άνθρωποι τότε, σύμφωνα με την αρχή του περιστερεώνα, θα υπήρχαν δύο κάτοικοι με τον ίδιο αριθμό τριχών στο κεφάλι τους. Γιατί αν υπάρχουν 718 κάτοικοι τότε ένας κάτοικος πρέπει να είναι φαλακρός;

5. Ένα πεπερασμένο σύνολο συμβόλων όπως το $\Sigma = \{0, 1\}$ ονομάζεται αλφάβητο και μια πεπερασμένη ακολουθία συμβόλων του αλφαβήτου ονομάζεται συμβολοσειρά (υπάρχει και η κενή συμβολοσειρά e που δεν περιέχει κανένα σύμβολο και ανήκει σε κάθε σύνολο που περιέχει συμβολοσειρές). Το σύνολο Σ^* περιέχει όλες τις συμβολοσειρές που παράγονται από το αλφάβητο Σ (μαζί και την κενή συμβολοσειρά). Να δείξετε ότι το Σ^* είναι απείρως αριθμήσιμο σύνολο.

   Πρέπει να δώσουμε ένα τρόπο απαρίθμησης των στοιχείων του Σ^*. Ξεκινάμε με τη διάταξη του αλφαβήτου: το στοιχείο 0 προηγείται του στοιχείου 1. Στην συνέχεια προχωράμε ως εξής:

   - Για κάθε $i \geq 0$, όλες οι συμβολοσειρές μήκους i απαριθμούνται πριν από όλες τις συμβολοσειρές που έχουν μήκος $i + 1$,
   - Οι 2^i συμβολοσειρές μήκους ακριβώς i απαριθμούνται λεξικογραφικά, δηλαδή αν δύο συμβολοσειρές s_1 και s_2, ίδιου μήκους, διαφέρουν στο πρώτο σύμβολο ή ξεκινούν από τα αριστερά με τα ίδια σύμβολα και διαφέρουν στο σύμβολο στην j-οστή θέση, τότε μικρότερη είναι η συμβολοσειρά που στην πρώτη ή j-οστή θέση αντίστοιχα έχει το σύμβολο 0.

   Έχουμε λοιπόν την παρακάτω 1-1 και επί συνάρτηση από το $\mathbb{N}$ στο Σ^*:

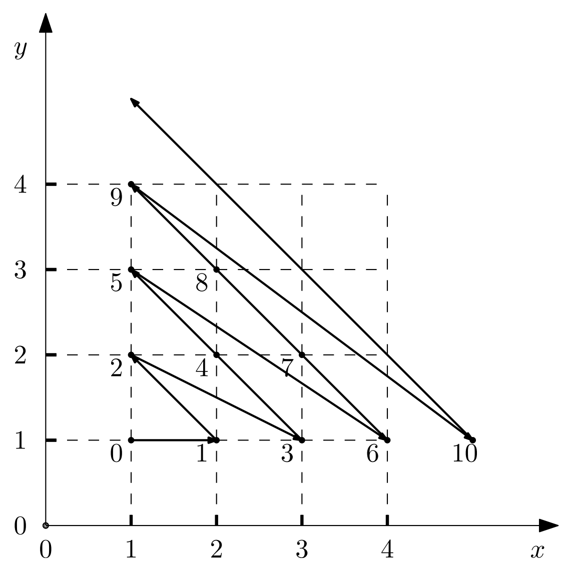
$$
\begin{array}{cr}
0 & e \\
1 & 0 \\
2 & 1 \\
3 & 00 \\
5 & 01 \\
6 & 10 \\
7 & 11 \\
8 & 000 \\
9 & 001 \\
10 & 010 \\
11 & 011 \\
12 & 100 \\
13 & 101 \\
14 & 110 \\
15 & 111 \\
16 & 0000 \\
17 & 0001 \\
\vdots & \vdots
\end{array}
$$

6. Αποδείξτε ότι τό σύνολο των ολικών συναρτήσεων $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (ολικές ονομάζονται οι συναρτήσεις που ορίζονται για κάθε $x \in \mathbb{N}$) είναι μη αριθμήσιμα άπειρο.

   Πρέπει να διαμορφώσουμε ένα διαγώνιο επιχείρημα παρόμοιο με αυτό που χρησιμοποιούμε για νά δείξουμε ότι το $\mathbb{R}$ είναι μη αριθμήσιμα άπειρο. Έστω ότι υπάρχει τρόπος να καταγραφούν με κάποια σειρά $\phi_1, \phi_2, \ldots$ όλες οι ολικές συναρτήσεις. Η συνάρτηση $f = \phi_x(x) + 1$ είναι ολική συνάρτηση, συνεπώς πρέπει να εμφανίζεται στην καταγραφή των ολικών συναρτήσεων με κάποιο δείκτη y, δηλαδή $f = \phi_y$. Τότε όμως $\phi_y(y) = f(y) = \phi_y(y) + 1$, άτοπο. Άρα δεν υπάρχει τρόπος καταγραφής όλων των ολικών συναρτήσεων, συνεπώς το σύνολό τους είναι μη αριθμήσιμα άπειρο.

7. Αποδείξτε ότι το σύνολο $\mathbb{Q}^* = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{N},\ x \neq 0,\ y \neq 0\}$ είναι αριθμήσιμα άπειρο.

Πρόκειται ουσιαστικά να δώσουμε μια απαρίθμηση των ρητών που είναι μεγαλύτεροι από το 0. Η απαρίθμηση θα έχει ως εξής: $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ Όλοι οι ρητοί αντιστοιχίζονται στα ακέραια σημεία στο πρώτο τεταρτημόριο όπως φαίνεται παρακάτω:



Ψάχνουμε λοιπόν μια συνάρτηση που θα αντιστοιχίζει τα ζεύγη των φυσικών αριθμών (x, y) που σχηματίζουν τον κάθε ρητό στους φυσικούς αριθμούς που φαίνονται στο σχήμα, δηλαδή το κλάσμα $\frac{1}{1}$ στον αριθμό 0, το $\frac{2}{1}$ στον αριθμό 1, το $\frac{1}{2}$ στον αριθμό 2, κτλ. Ψάχνουμε φυσικά ένα κλειστό τύπο γι΄ αυτή τη συνάρτηση. Στο παραπάνω σχήμα είναι σημειωμένες οι τιμές της συνάρτησης σαν διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί κατά τη σημειωμένη φορά κίνησης.

Παρατηρούμε ότι κατά τη φορά της απαρίθμησης που φαίνεται στο σχήμα κάθε νέα τιμή $f(x, y)$ της συνάρτησης που ψάχνουμε, ισούται με τον αριθμό των ακέραιων σημείων που έχουν ήδη απαριθμηθεί, π.χ. $f(1, 1) = 0$, 0 ακέραια σημεία προηγούνται του $f(1, 1)$, …, $f(5, 1) = 10$, 10 ακέραια σημεία προηγούνται του $f(5, 1)$. Σκοπός μας είναι να εκφράσουμε το $f(x, y)$ σαν τον αριθμό των σημείων που προηγούνται κατά τη σημειωμένη φορά.

Παρατηρούμε επίσης ότι τα ακέραια σημεία λαμβάνονται πάνω σε ευθείες παράλληλες με την $y = -x$ που ονομάζουμε διαγωνίους. Έχουμε λοιπόν ότι πριν από το $f(x, y)$ προηγούνται $x + y - 2$ διαγώνιοι: η πρώτη έχει 1 ακέραιο σημείο, η δεύτερη έχει 2 ακέραια σημεία, …, η $(x + y - 2)$-οστή έχει $x + y - 1$ σημεία. Πάνω σε όλες αυτές τις διαγωνίους υπάρχουν $1 + 2 + \cdots + (x + y - 2) = (x + y - 2)(x + y - 1)/2$ σημεία. Μένει να προσθέσουμε τον αριθμό των σημείων που προηγούνται του $f(x, y)$ πάνω στην διαγώνιο που ανήκει: ο αριθμός τους είναι $y - 1$. Συνεπώς έχουμε:

$$f(x, y) = \frac{(x + y - 2)(x + y - 1)}{2} + y - 1$$

Η συνάρτηση είναι 1-1 και επί του $\mathbb{N}$ (γιατί;).

2 Συνδυαστική

1. Με πόσους τρόπους μπορούμε να διαλέξουμε 12 παγωτά από τις γεύσεις σοκολάτα, λεμόνι, φράουλα, γιαούρτι και βανίλια;
   Αν διαλέξουμε c παγωτά σοκολάτα, l παγωτά λεμόνι, s παγωτά φράουλα, g παγωτά γιαούρτι και v παγωτά βανίλια τότε οι διαφορετικές επιλογές μας αντιστοιχίζονται 1-1 και επί με το σύνολο που περιέχει συμβολοακολουθίες του τύπου:
   $$\underbrace{0\ldots0}_{c}1\underbrace{0\ldots0}_{l}1\underbrace{0\ldots0}_{s}1\underbrace{0\ldots0}_{g}1\underbrace{0\ldots0}_{v}$$
   όπου πρέπει να επιλέξουμε τις 4 από τις 16 θέσεις σαν διαχωριστικά των γεύσεων. Άρα έχουμε συνολικά $\binom{16}{4}$ τρόπους.

2. Την παραμονή των Χριστουγέννων οι γονείς του Αλέξη του Κώστα και του Δημήτρη πρέπει να μοιράσουν στα παιδιά τους 13 παιχνίδια. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να κατανείμουν τα παιχνίδια μεταξύ των παιδιών τους;
   Αν a παιχνίδια πάρει ο Αλέξης, k παιχνίδια ο Κώστας και d παιχνίδια ο Δημήτρης τότε οι διαφορετικοί τρόποι κατανομής των παιχνιδιών αντιστοιχίζονται 1-1 και επί με το σύνολο που περιέχει συμβολοακολουθίες του τύπου:
   $$\underbrace{0\ldots0}_{a}1\underbrace{0\ldots0}_{k}1\underbrace{0\ldots0}_{d}$$
   όπου πρέπει να επιλέξουμε τις 2 από τις 15 θέσεις σαν διαχωριστικά του αριθμού των παιχνιδιών που παίρνει κάθε παιδί. Άρα έχουμε συνολικά $\binom{15}{2}$ τρόπους.

3. Μετακινούμαστε σε ένα πλέγμα ακεραίων από το σημείο (0,0) έως στο σημείο (10,20) με δεξιά βήματα (που αυξάνουν την πρώτη συντεταγμένη) και με ανοδικά βήματα (που αυξάνουν τη δεύτερη συντεταγμένη). Πόσα διαφορετικά μονοπάτια μπορούμε να ακολουθήσουμε;
   Αν συμβολίσουμε τη δεξιά κίνηση με 0 και την ανοδική κίνηση με 1 τότε τα διαφορετικά μονοπάτια που μπορούμε να επιλέξουμε αντιστοιχίζονται 1-1 και επί με τις συμβολοακολουθίες 30 θέσεων που έχουν 10 μηδενικά και 20 άσσους. Συνεπώς αρκεί από τις 30 θέσεις να επιλέξουμε αυτές των μηδενικών άρα έχουμε $\binom{30}{10}$ διαφορετικά μονοπάτια.

4. Ένας περιπατητής κάνει κάθε μέρα μια βόλτα 20 χιλιομέτρων από τα οποία για 5 χιλιόμετρα κατευθύνεται προς Βορρά, για 5 χιλιόμετρα κατευθύνεται προς την Ανατολή, για 5 χιλιόμετρα κατευθύνεται προς το Νότο και για 5 χιλιόμετρα κατευθύνεται προς τη Δύση. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί γίνει μια τέτοια βόλτα;
   Υπάρχει μια 1-1 και επί αντιστοίχιση όλων των διαφορετικών τρόπων που μπορεί να γίνει η βόλτα με το σύνολο που περιέχει τις συμβολοακολουθίες που έχουν $5N$, $5E$, $5S$ και $5W$. Όμως αν αντιστοιχίσουμε τις διατάξεις του $ES_1S_2S_3WS_4S_5$ στις διατάξεις του $ESSWSS$ έχουμε ότι η αντιστοίχιση αυτή είναι 5! προς 1. Τελικά $5!^4$ από τις διατάξεις του
   $$N_1N_2N_3N_4N_5E_1E_2E_3E_4E_5S_1S_2S_3S_4S_5W_1W_2W_3W_4W_5$$
   αντιστοιχίζονται σε μία διάταξη του
   $$NNNNNEEEEESSSSSWWWWW$$
   άρα από το κανόνα της διαίρεσης έχουμε συνολικά $\frac{20!}{5!^4}$ πιθανές βόλτες.

5. Στην τράπουλα έχουμε 52 φύλλα όπου κάθε φύλλο έχει *χρώμα* και *τιμή*. Υπάρχουν 4 χρώματα:
   $$\underset{\spadesuit}{\text{μπαστούνια}}\ \underset{\heartsuit}{\text{κούπες}}\ \underset{\clubsuit}{\text{σπαθιά}}\ \underset{\diamondsuit}{\text{καρό}}$$
   και 13 τιμές:
   $$2,3,4,5,6,7,8,9,\overset{\text{βαλές}}{J},\ \overset{\text{ντάμα}}{Q},\ \overset{\text{ρήγας}}{K},\ \overset{\text{άσσος}}{A}$$
   Στο παιχνίδι «απλουστευμένο πόκερ» κάθε παίκτης σε κάθε μοιρασιά λαμβάνει 5 φύλλα.

- Πόσες διαφορετικές μοιρασιές υπάρχουν όπου ένα παίκτης θα έχει καρέ (δηλαδή 4 φύλλα με ίδια τιμή και διαφορετικό χρώμα μαζί με ένα άλλο οποιοδήποτε φύλλο); Ένα παράδειγμα του καρέ είναι το $\{8\spadesuit, 8\diamondsuit, Q\heartsuit, 8\heartsuit, 8\clubsuit\}$ ή το $\{A\clubsuit, 2\clubsuit, 2\spadesuit, 2\heartsuit, 2\diamondsuit\}$.
  Υπάρχει μια 1-1 και επί αντιστοίχιση των μοιρασιών με καρέ με τις συμβολοακολουθίες που στην πρώτη θέση έχουν την τιμή των 4 φύλων στη συνέχεια την τιμή του 5ου φύλλου και τέλος το χρώμα του 5ου φύλλου. Δηλαδή έχουμε $(8, Q, \heartsuit) \leftrightarrow \{8\spadesuit, 8\diamondsuit, Q\heartsuit, 8\heartsuit, 8\clubsuit\}$ και $(2, A, \clubsuit) \leftrightarrow \{A\clubsuit, 2\clubsuit, 2\spadesuit, 2\heartsuit, 2\diamondsuit\}$. Έχουμε 13 τρόπους να επιλέξουμε την πρώτη τιμή, 12 τρόπους να επιλέξουμε τη δεύτερη τιμή και 4 τρόπους να επιλέξουμε το χρώμα. Άρα συνολικά έχουμε $13 \cdot 12 \cdot 4 = 624$ μοιρασιές με καρέ, δηλαδή 1 στις 4165 (γι΄ αυτό το καρέ είναι καλή μοιρασιά!).
- Πόσες διαφορετικές μοιρασιές υπάρχουν όπου ένας παίκτης θα έχει φούλ (δηλαδή τρία φύλλα της ίδιας τιμής και δύο φύλλα μιας άλλης τιμής); Ένα παράδειγμα του φούλ είναι $\{2\spadesuit, 2\clubsuit, 2\diamondsuit, J\clubsuit, J\diamondsuit\}$ ή το $\{5\diamondsuit, 5\clubsuit, 5\heartsuit, 7\heartsuit, 7\clubsuit\}$.
  Υπάρχει μια 1-1 και επί αντιστοίχιση των μοιρασιών με φούλ με τις συμβολοακολουθίες που στην πρώτη θέση έχουν την τιμή των 3 ίδιων φύλλων (13 τρόποι), στη συνέχεια έχουν την τριάδα των χρωμάτων των 3 ίδιων φύλλων ($\binom{4}{3}$ τρόποι), στη συνέχεια την τιμή των 2 ίδιων φύλλων (12 τρόποι) και τέλος τα χρώματα των δύο ίδιων φύλλων ($\binom{4}{2}$ τρόποι). Για παράδειγμα:

  $$(2, \{\spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit\}, J, \{\clubsuit, \diamondsuit\}) \leftrightarrow \{2\spadesuit, 2\clubsuit, 2\diamondsuit, J\clubsuit, J\diamondsuit\}$$

  Τελικά έχουμε $13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2}$ μοιρασιές.
- Πόσες διαφορετικές μοιρασιές υπάρχουν όπου ένας παίκτης θα έχει δύο ζευγάρια (δηλαδή δύο φύλλα ίδιας τιμής,άλλα δύο φύλλα ίδιας τιμής και ένα πέμπτο φύλλο μιας άλλης τιμής); Ένα παράδειγμα είναι $\{3\diamondsuit, 3\spadesuit, Q\diamondsuit, Q\heartsuit, A\clubsuit\}$.
  Υπάρχει μια αντιστοίχιση των μοιρασιών με δύο ζευγάρια με τις συμβολοακολουθίες που στην πρώτη θέση έχουν την τιμή του ενός ζευγαριού (13 τρόποι), στη συνέχεια τα χρώματα του ζευγαριού ($\binom{4}{2}$ τρόποι), στη συνέχεια την τιμή του άλλου ζευγαριού (12 τρόποι), στη συνέχεια τα χρώματα του ζευγαριού ($\binom{4}{2}$ τρόποι), στη συνέχεια την τιμή του πέμπτου φύλλου (11 τρόποι) και τέλος το χρώμα του πέμπτου φύλλου (4 τρόποι). Όμως αυτή η αντιστοίχιση είναι 2 προς 1 γιατί αντιστοιχίζει δύο συμβολοακολουθίες, π.χ. τις $(3, \{\diamondsuit, \spadesuit\}, Q, \{\diamondsuit, \heartsuit\}, A, \clubsuit)$ και $(Q, \{\diamondsuit, \heartsuit\}, 3, \{\diamondsuit, \spadesuit\}, A, \clubsuit)$ στην ίδια μοιρασιά: $\{3\diamondsuit, 3\spadesuit, Q\diamondsuit, Q\heartsuit, A\clubsuit\}$. Τελικά ο αριθμός των διαφορετικών μοιρασιών με δύο ζευγάρια είναι:

  $$\frac{13 \cdot \binom{4}{2} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2} \cdot 11 \cdot 4}{2}$$

  Μια αντιστοίχιση που είναι 1-1 και επί είναι η εξής: η συμβολοακολουθία ξεκινά με τις τιμές των δύο ζευγών ($\binom{13}{2}$ τρόποι) συνεχίζει με τα χρώματα του υψηλότερου σε τιμή ζεύγους ($\binom{4}{2}$ τρόποι), συνεχίζει με τα χρώματα του χαμηλότερου σε τιμή ζεύγους ($\binom{4}{2}$ τρόποι), συνεχίζει με την τιμή του πέμπτου φύλλου (11 τρόποι) και τελειώνει με το χρώμα του πέμπτου φύλλου (4 τρόποι). Για παράδειγμα η μοιρασιά $\{3\diamondsuit, 3\spadesuit, Q\diamondsuit, Q\heartsuit, A\clubsuit\}$ αντιστοιχίζεται στη συμβολοακολουθία $(\{3, Q\}, \{\diamondsuit, \heartsuit\}, \{\diamondsuit, \spadesuit\}, A, \clubsuit)$. Τελικά ο αριθμός των διαφορετικών μοιρασιών με δύο ζεύγη είναι:

  $$\binom{13}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 11 \cdot 4 = \frac{13 \cdot \binom{4}{2} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2} \cdot 11 \cdot 4}{2}$$

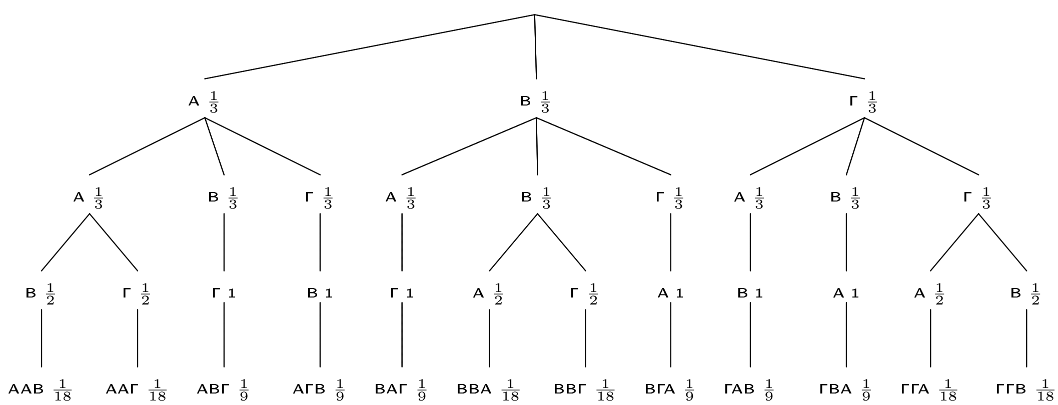
6. Μετακινούμαστε σε ένα πλέγμα ακεραίων από το σημείο (0,0) μέχρι το σημείο (50,50) με βήματα που αυξάνουν μόνο τη μια συντεταγμένη και αφήνουν την άλλη ανέπαφη. Πόσα διαφορετικά μονοπάτια μπορούμε να διασχίσουμε αν υπάρχουν εμπόδια, δια μέσου των οποίων δεν μπορούμε να περάσουμε, στα σημεία (10,10) και (20,20);

   Από προηγούμενη άσκηση ο συνολικός αριθμός των μονοπατιών είναι $\binom{100}{50}$ όμως πρέπει να αφαιρεθούν τα απαγορευμένα μονοπάτια. Υπάρχουν $\binom{20}{10} \cdot \binom{80}{40}$ μονοπάτια διαμέσου του πρώτου εμποδίου γιατί έχουμε $\binom{20}{10}$ μονοπάτια από το (0,0) μέχρι το (10,10) και $\binom{80}{40}$ μονοπάτια από το (10,10) μέχρι το (50,50). Όμοια υπάρχουν $\binom{40}{20} \cdot \binom{60}{30}$ μονοπάτια διαμέσου του δεύτερου εμποδίου. Πρέπει επίσης να λάβουμε υπόψη και τα μονοπάτια που περνούν διαμέσου και των δύο εμποδίων τα οποία είναι $\binom{20}{10} \cdot \binom{20}{10} \cdot \binom{60}{30}$. Από την αρχή εγκλεισμού αποκλεισμού έχουμε για το ζητούμενο αριθμό μονοπατιών ότι είναι ίσος με:

$$\binom{100}{50} - \binom{20}{10} \cdot \binom{80}{40} - \binom{40}{20} \cdot \binom{60}{30} + \binom{20}{10} \cdot \binom{20}{10} \cdot \binom{60}{30}$$

3 Πιθανότητες

1. *(Monty Hall δείτε επίσης και το αντίστοιχο λήμμα στην Wikipedia)* Σε ένα τηλεπαιχνίδι ο παίκτης πρέπει να επιλέξει μία από τρείς πόρτες. Πίσω από τη μία πόρτα βρίσκεται ένα αυτοκίνητο ενώ πίσω από τις άλλες δύο βρίσκονται κατσίκες (sic). Μετά από την επιλογή του παίκτη ο παρουσιαστής, ανεξάρτητα από την επιλογή του παίκτη, αποκαλύπτει με την ίδια πιθανότητα μια από τις δύο πόρτες που πίσω της υπάρχει μια κατσίκα. Είναι προς το συμφέρον του παίκτη να αλλάξει την αρχική επιλογή του;
Το δέντρο που απεικονίζει το δειγματικό χώρο είναι το παρακάτω:



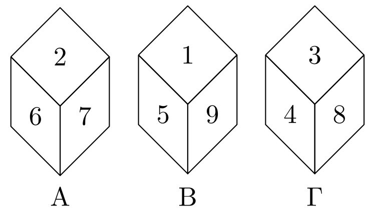
Στο πρώτο επίπεδο έχουμε τις επιλογές για τη θέση του αυτοκινήτου. Στο δεύτερο επίπεδο έχουμε τις επιλογές για την αρχική επιλογή του παίκτη. Στο επόμενο επίπεδο απεικονίζονται οι επιλογές για την πόρτα που αποκαλύπτει ο παρουσιαστής. Στο τελευταίο επίπεδο απεικονίζονται όλα τα πιθανά αποτελέσματα του παιχνιδιού μαζί με τις αντίστοιχες πιθανότητες (σε κάθε επίπεδο οι επιλογές είναι ανεξάρτητες από το προηγούμενο επίπεδο οπότε πολλαπλασιάζουμε τις πιθανότητες κατα μήκος του μονοπατιού προς τα φύλλα). Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε τις πιθανότητες που μας ενδιαφέρουν ($P(\text{STAYS})$: δεν αλλάζει επιλογή και κερδίζει, $P(\text{SWITCHES})$: αλλάζει επιλογή και κερδίζει):

$$P(\text{STAYS}) = P(\text{ΑΑΒ}) + P(\text{ΑΑΓ}) + P(\text{ΒΒΑ}) + P(\text{ΒΒΓ}) + P(\text{ΓΓΑ}) + P(\text{ΓΓΒ}) = 6 \cdot \frac{1}{18} = \frac{1}{3}$$

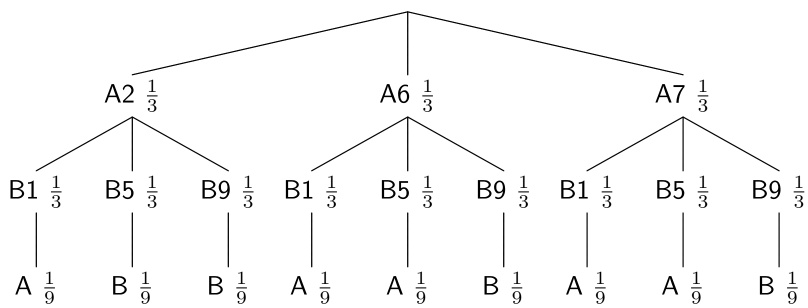
$$P(\text{SWITCHES}) = P(\text{ΑΒΓ}) + P(\text{ΑΓΒ}) + P(\text{ΒΑΓ}) + P(\text{ΒΓΑ}) + P(\text{ΓΑΒ}) + P(\text{ΓΒΑ}) = 6 \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{3}$$

Συνεπώς είναι προς το συμφέρον του παίκτη να αλλάξει επιλογή.

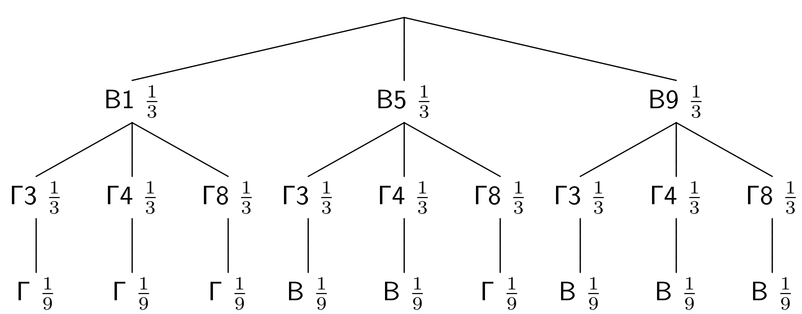
2. Το παιχνίδι με τα «περίεργα ζάρια» παίζεται με τα παρακάτω τρία περίεργα αριθμημένα ζάρια (Α,Β,Γ). Ο παίκτης που αρχίζει επιλέγει ένα ζάρι και το ρίχνει και ο επόμενος επιλέγει ένα από τα υπόλοιπα ζάρια και το ρίχνει.



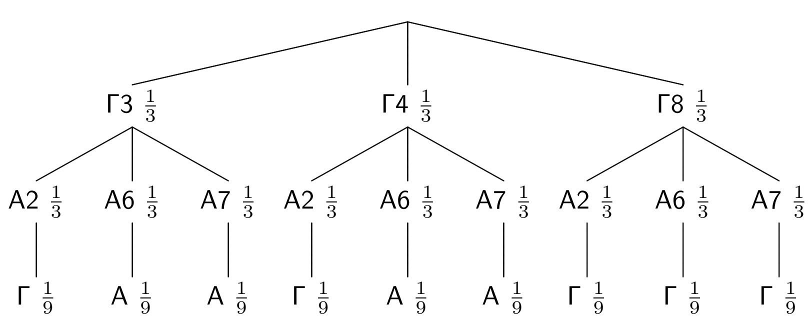
Κερδίζει ο παίκτης που το ζάρι του θα δείξει το μεγαλύτερο αριθμό. Ποιό ζάρι πρέπει να επιλέξουμε ώστε να μεγιστοποιήσουμε την πιθανότητα νίκης;
Ας δούμε το δειγματικό χώρο όταν το ζάρι A παίζεται εναντίον του ζαριού B:



Στο πρώτο επίπεδο έχουμε τα αποτελέσματα από το ρίξιμο του ζαριού A, στο δεύτερο επίπεδο τα αποτελέσματα από το ρίξιμο του ζαριού B και στο τρίτο επίπεδο απεικονίζεται το ζάρι που νικά. Είναι φανερό από το δέντρο ότι το ζάρι A νικά το ζάρι B με πιθανότητα $\frac{5}{9}$.
Ας δούμε το δειγματικό χώρο όταν το ζάρι B παίζεται εναντίον του ζαριού Γ:

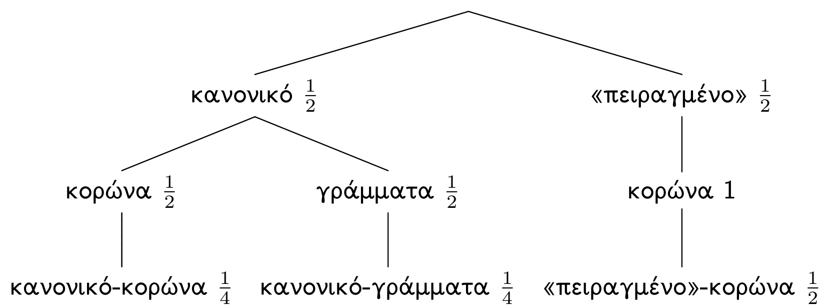


Είναι φανερό από το δέντρο ότι το ζάρι B νικά το ζάρι Γ με πιθανότητα $\frac{5}{9}$.
Ας δούμε το δειγματικό χώρο όταν το ζάρι Γ παίζεται εναντίον του ζαριού A:



Συννοψίζοντας το ζάρι Α συμφέρει περισσότερο από το ζάρι Β, το ζάρι Β συμφέρει περισσότερο από το ζάρι Γ και το ζάρι Γ συμφέρει περισσότερο από το ζάρι Α! Όποιο ζάρι και να διαλέξει ο πρώτος παίκτης ο δεύτερος έχει να επιλέξει άλλο ζάρι που θα κερδίσει με πιθανότητα $\frac{5}{9}$. Ο παίκτης που παίζει πρώτος πάντα μειονεκτεί!

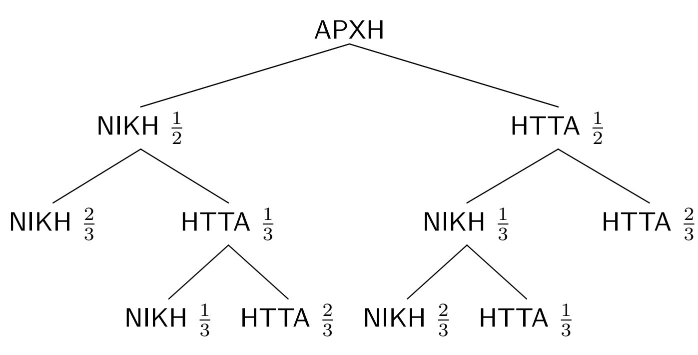
3. Έχουμε δύο νομίσματα, το κανονικό που με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ φέρνει κορώνα και με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ φέρνει γράμματα και το «πειραγμένο» που πάντα φέρνει κορώνα. Επιλέγουμε ένα νόμισμα τυχαία και το γυρίζουμε. Αν το αποτέλεσμα είναι κορώνα ποιά είναι η πιθανότητα να έχουμε επιλέξει το κανονικό νόμισμα;
Το δέντρο που απεικονίζει το δειγματικό χώρο είναι το παρακάτω:



Συνεπώς για την πιθανότητα που μας ενδιαφέρει έχουμε:

$$\frac{P(\text{κανονικό-κορώνα})}{P(\text{κανονικό-κορώνα}) + P(\text{ «πειραγμένο»-κορώνα})} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

4. Μια ποδοσφαιρική ομάδα ξεκινάει τους αγώνες τις με πιθανότητα νίκης $1/2$. Στη συνέχεια μετά από κάθε νίκη η πιθανότητα να κερδίσει ένα αγώνα είναι $2/3$, ενώ μετά από μια ήττα η πιθανότητα να κερδίσει είναι $1/3$. Η ομάδα πρόκειται να παίξει σε ένα τουρνουά 3 αγώνων όπου όποιος σημειώσει δύο συνεχόμενες νίκες είναι ο τελικός νικητής. Ποιά είναι η πιθανότητα να κερδίσει η ομάδα το τουρνουά αν ξέρουμε ότι κέρδισε τον πρώτο αγώνα;
Το δέντρο που απεικονίζει το δειγματικό χώρο είναι το ακόλουθο:



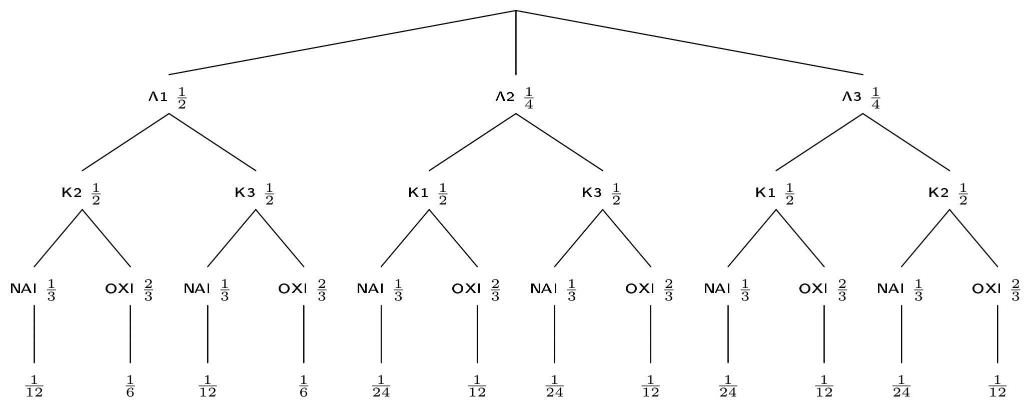
Η πιθανότητα να κερδίσει η ομάδα τον πρώτο αγώνα είναι:

$$P(\text{ΝΙΚΗ-ΝΙΚΗ}) + P(\text{ΝΙΚΗ-ΗΤΤΑ-ΝΙΚΗ}) + P(\text{ΝΙΚΗ-ΗΤΤΑ-ΗΤΤΑ}) = \frac{2}{6} + \frac{1}{18} + \frac{2}{18} = \frac{1}{2}$$

Η πιθανότητα να κερδίσει η ομάδα το τουρνουά δεδομένου ότι κέρδισε το πρώτο παιχνίδι είναι:

$$\frac{P(\text{ΝΙΚΗ-ΝΙΚΗ}) + P(\text{ΝΙΚΗ-ΗΤΤΑ-ΝΙΚΗ})}{P(\text{ΝΙΚΗ-ΝΙΚΗ}) + P(\text{ΝΙΚΗ-ΗΤΤΑ-ΝΙΚΗ}) + P(\text{ΝΙΚΗ-ΗΤΤΑ-ΗΤΤΑ})} = \frac{\frac{2}{6}+\frac{1}{18}}{\frac{2}{6}+\frac{1}{18}+\frac{2}{18}} = \frac{7}{9}$$

5. Μια λεοπάρδαλη κατοικεί στη σπηλιά Α με πιθανότητα $\frac{1}{2}$, στη σπηλιά Β με πιθανότητα $\frac{1}{4}$ και στη σπηλιά Γ με πιθανότητα $\frac{1}{4}$. Ένα κουνέλι μπαίνει σε κάποια από τις δύο σπηλιές που δεν κατοικούνται με ίση πιθανότητα. Το κουνέλι αφήνει ίχνη μπροστά από τη σπηλιά που μπήκε με πιθανότητα $\frac{1}{3}$, ενώ οι λεοπαρδάλεις δεν αφήνουν ποτέ ίχνη. Ποιά είναι η πιθανότητα να κατοικεί η λεοπάρδαλη στη σπηλιά 3 δεδομένου ότι δεν υπάρχουν ίχνη μπροστά από τη σπηλιά 2;
Το δέντρο που απεικονίζει το δειγματικό χώρο είναι το ακόλουθο:

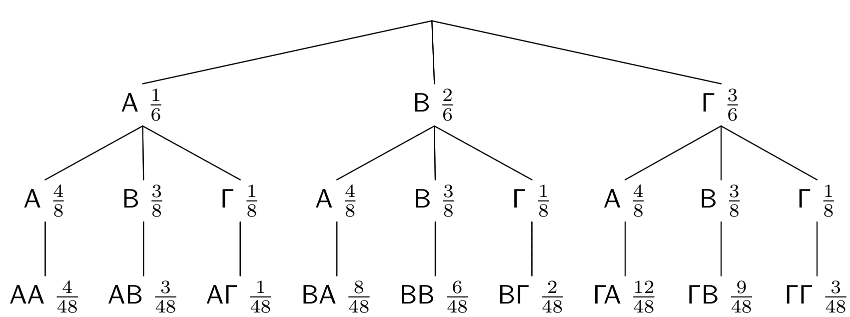


Στο πρώτο επίπεδο φαίνονται οι επιλογές για την λεοπάρδαλη, στο δεύτερο επίπεδο οι επιλογές για το κουνέλι, στο τρίτο επίπεδο οι επιλογές για το αν υπάρχουν ίνχη ή όχι μπροστά από τις σπηλιές και στο τελευταίο επίπεδο οι πιθανότητες για κάθε ενδεχόμενο από τη ρίζα με κατεύθυνση προς το τρίτο επίπεδο (π.χ. η πιθανότητα να κατοικεί η λεοπάρδαλη στη σπηλιά 2, το κουνέλι να μπήκε στη σπηλιά 3 και να μην έχει αφήσει ίχνη είναι $\frac{1}{12}$). Η πιθανότητα που μας ενδιαφέρει είναι:

$$\frac{P(\text{Λ3-Κ1-ΝΑΙ}) + P(\text{Λ3-Κ1-ΟΧΙ}) + P(\text{Λ3-Κ2-ΟΧΙ})}{1 - (P(\text{Λ1-Κ2-ΝΑΙ}) + P(\text{Λ3-Κ2-ΝΑΙ}))} = \frac{\frac{1}{24} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12}}{1 - \frac{1}{12} - \frac{1}{24}} = \frac{5}{21}$$

Στον παρονομαστή χρησιμοποιήσαμε για ευκολία το συμπληρωματικό ενδεχόμενο του «δεν υπάρχουν ίχνη μπροστά από τη σπηλιά 2».

6. Οι Α, Β και Γ μισούν και θέλουν να πυροβολήσουν τον Δ. Αν κάποιος από τους τρείς έχει την ευκαιρία και το περίστροφο πυροβολεί το Δ, αλλιώς ο Δ μένει ανέπαφος. Ακριβώς ένας από τους Α, Β, Γ έχει την ευκαιρία με αντίστοιχη πιθανότητα $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$. Ακριβώς ένας από τους Α, Β, Γ έχει το περίστροφο ανεξάρτητα με το ποιός έχει την ευκαιρία με αντίστοιχη πιθανότητα $\frac{4}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{8}$. Ποιά είναι η πιθανότητα να πυροβοληθεί ο Δ; Αν ο Γ δεν έχει το περίστροφο ποιά είναι η πιθανότητα να πυροβοληθεί ο Δ; Αν ο Δ πυροβολήθηκε ποιά είναι η πιθανότητα να είχε την ευκαιρία ο Β;
Το δέντρο που απεικονίζει το δειγματικό χώρο είναι το παρακάτω:



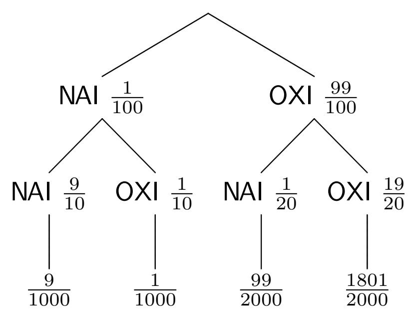
Η πιθανότητα να πυροβοληθεί ο Δ είναι $P(\mathsf{AA}) + P(\mathsf{BB}) + P(\Gamma\Gamma) = \frac{13}{48}$. Αν ο Γ δεν έχει το περίστροφο η πιθανότητα να πυροβοληθεί ο Δ είναι:

$$\frac{P(\mathsf{AA}) + P(\mathsf{BB})}{P(\mathsf{AA}) + P(\mathsf{AB}) + P(\mathsf{BA}) + P(\mathsf{BB}) + P(\Gamma\mathsf{A}) + P(\Gamma\mathsf{B})} = \frac{5}{21}$$

Αν πυροβολήθηκε ο Δ, η πιθανότητα να είχε την ευκαιρία ο Β είναι:

$$\frac{P(\mathsf{BB})}{P(\mathsf{AA}) + P(\mathsf{BB}) + P(\Gamma\Gamma)} = \frac{6}{13}$$

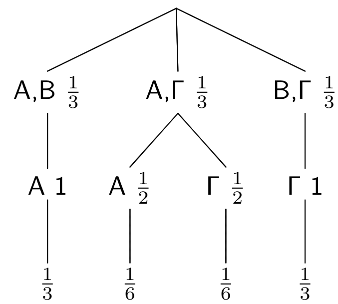
7. Η *Discretemathphobia* είναι μια σπάνια ασθένεια που προσβάλει τους φοιτητές του τμήματος Πληροφορικής. Ο ασθενής έχει την παραίσθηση ότι εξετάζεται σε ιδιαίτερα δύσκολα θέματα Διακριτών Μαθηματικών. Ένας φοιτητής του τμήματος Πληροφορικής, επιλεγμένος τυχαία, πάσχει από *Discretemathphobia* με πιθανότητα $\frac{1}{100}$. Ένας πάσχοντας από *Discretemathphobia* έχει τρέμουλο στα χέρια με πιθανότητα $\frac{9}{10}$. Ένας φοιτητής χωρίς *Discretemathphobia* έχει τρέμουλο στα χέρια με πιθανότητα $\frac{1}{20}$. Ποιά είναι η πιθανότητα ένας τυχαία επιλεγμένος φοιτητής του τμήματος Πληροφορικής να πάσχει από *Discretemathphobia* δεδομένου ότι έχει τρέμουλο στα χέρια;
   Το δέντρο που απεικονίζει το δειγματικό χώρο είναι το ακόλουθο:



   Στο πρώτο επίπεδο έχουμε την επιλογή αν πρόκειται ή όχι για ασθενή. Στο επόμενο επίπεδο έχουμε την επιλογή αν έχει ή όχι τρέμουλο στα χέρια (π.χ. η πιθανότητα να μην πάσχει ο φοιτητής και να έχει τρέμουλο είναι $\frac{99}{2000}$). Οπότε για τη ζητούμενη πιθανότητα έχουμε:

$$\frac{P(\mathsf{NAI\text{-}NAI})}{P(\mathsf{NAI\text{-}NAI}) + P(\mathsf{OXI\text{-}NAI})} = \frac{\frac{9}{1000}}{\frac{9}{1000} + \frac{99}{2000}} = \frac{18}{117}$$

8. Σε μια φυλακή υπάρχουν τρείς κρατούμενοι ο Α, ο Β και ο Γ. Η επιτροπή αναστολών έχει αποφασίσει να αποφυλακίσει τυχαία δύο από τους τρείς, χωρίς όμως να ανακοινώσει τα ονόματά τους. Ο δεσμοφύλακας προτείνει στο Β να του ανακοινώσει ποιός από τους Α ή Γ πρόκειται να αποφυλακιστεί. Ο Β δεν δέχεται την προσφορά του δεσμοφύλακα σκεπτόμενος ως εξής: αν μάθει για παράδειγμα ότι θα αποφυλακιστεί ο Γ, τότε θα γνωρίζει ότι θα αποφυλακιστεί είτε ο Α είτε ο εαυτός του, οπότε θα ρίξει την πιθανότητα αποφυλάκισής του από το $\frac{2}{3}$ στο $\frac{1}{2}$. Που βρίσκεται το λάθος στο συλλογισμό του Β;
   Το δέντρο που απεικονίζει το δειγματικό χώρο είναι το ακόλουθο:



Το λάθος του Β βρίσκεται στο ότι το ενδεχόμενο να αποφυλακιστεί ο Γ είναι διαφορετικό από το ενδεχόμενο να πληροφορηθεί από το δεσμοφύλακα ότι θα αποφυλακιστεί ο Γ. Συγκεκριμένα η πιθανότητα να αποφυλακιστεί ο Β δεδομένου ότι αποφυλακίστηκε ο Γ είναι πράγματι $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}} = \frac{1}{2}$. Η πιθανοτητα όμως να αποφυλακιστεί ο Β δεδομένου ότι ο δεσμοφύλακας είπε ότι θα αποφυλακιστεί ο Γ είναι $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = \frac{2}{3}$. Συνεπώς η πιθανότητα να αποφυλακιστεί ο Β μένει αμετάβλητη από την όποια δήλωση του δεσμοφύλακα.